

**Feststellungsprüfung Mathematik**

**Analysis**

Arbeitszeit: 90 Minuten

**Musterprüfung**

Hilfsmittel: nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner

**1.0** Gegeben sind die reellen Funktionen  $f_a(x) = \frac{x^2}{a} - 2x + a$  mit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $D_{f_a} = \mathbb{R}$ .

1.1 Zeigen Sie, dass die Scheitelpunkte aller Parabeln  $f_a$  auf der  $x$ -Achse liegen.

1.2 Geben Sie die Wertemenge der Funktion  $f_a$  in Abhängigkeit von  $a$  an.

**2.0** Setzen Sie nun  $a = 4$ . Sie erhalten die Funktion  $f_4(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ .

2.1 Zeichnen Sie den Graph der Funktion  $f_4$  in ein kartesisches Koordinatensystem mit  $1 \text{ LE} = 0,5 \text{ cm}$ .

2.2 Zeigen Sie, dass  $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 4x - \frac{11}{3}$  eine Stammfunktion von  $f_4$  ist.

2.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte der Funktion  $F$ .

2.4 Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen  $f_4$  und  $F$  im Punkt  $P(2/y_P)$  senkrecht schneiden und dass der Punkt  $P$  der einzige Schnittpunkt ist.

2.5 Zeichnen Sie den Graph der Funktion  $F$  in das Koordinatensystem aus 2.1 ein.

2.6 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen  $f_4$  und  $F$  sowie von der  $y$ -Achse im I. und IV. Quadranten eingeschlossen wird.

**3.0** Die Gesamtkostenfunktion eines Unternehmens ist gegeben durch

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 3 \text{ mit } D_{\text{ök}} = [0;7]$$

3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes  $P$ , in dem der Graph der Funktion  $K$  die geringste Steigung hat. Um welchen besonderen Punkt handelt es sich?

3.2 Das Produkt des Unternehmens wird zu einem Preis von 10 GE pro ME verkauft.

a) Geben Sie den Term der Erlösfunktion an.

b) Geben Sie den Term der Gewinnfunktion an.

3.3 Berechnen Sie die Produktmenge  $x_{\text{max}}$ , für die das Unternehmen den absolut größten Gewinn erzielt. Betrachten Sie auch die Ränder der Definitionsmenge.

**4.0** Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von 10,00 € durchschnittlich 200 Besucher. Bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um 1,00 € nimmt die durchschnittliche Besucherzahl um 10 Personen ab, bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um 2,00 € um 20 Personen, bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um 3,00 € um 30 Personen usw.

4.1 Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung  $p(x)$  für den Eintrittspreis und eine Funktionsgleichung für die Besucherzahl  $z(x)$  in Abhängigkeit von der Preiserhöhung  $x$  an.

4.2 Geben Sie den Term der Erlösfunktion  $E(x)$  und eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_E$  an. (Ergebnis  $E(x) = -10x^2 + 100x + 2000$ )

4.3 Berechnen Sie den Eintrittspreis so, dass die Einnahmen den größten Wert annehmen.