Universität Hannover

Niedersächsisches Studienkolleg

Prüfungsvorschlag Mathematik M-Kurs

Aufgabe 1

a) Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades schneidet die x-Achse an der Stelle x = -5 und hat an der Stelle x = -1 einen Wendepunkt. Die Wendetangente hat die Gleichung y = -12x + 4. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

b) Gegeben ist jetzt die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{5}{8}$.
Untersuchen Sie diese Funktion (Definitionsbereich, Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Krümmungsverhalten) und skizzieren Sie den Grafen von f.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die der Graf der Funktion f aus Aufgabenteil b) mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = (x^2 + 2x)\cdot e^{-x}$ und g mit $g(x) = 3e^{-x}$.

a) Diskutieren Sie die Funktion f (Definitionsbereich, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Krümmungsverhalten).

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Grafen von f und g und skizzieren Sie die Grafen von f und g gemeinsam in ein Koordinatensystem.

c) Die Grafen von f und g begrenzen auf der Geraden x = k (k > 1) eine Strecke. Berechnen Sie k so, dass die Länge dieser Strecke maximal wird.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{x^2 + (a-1)x - a}{x + 1}$, $a \in \mathrm{IR}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von allen Funktionen der Schar und berechnen Sie die Achsenschnittpunkte der Grafen der Schar.

b) Untersuchen Sie, für welche Werte von a die Grafen von f_a Definitionslücken bzw. Polstellen besitzen.

c) Zeigen Sie, dass die Asymptoten aller Grafen der Schar parallel sind.

d) Stellen Sie fest, für welche Werte von a die Grafen von f_a Extrempunkte besitzen, und zeigen Sie, dass kein Graf der Schar einen Wendepunkt hat.

e) Untersuchen Sie f_{-1} vollständig. Zur Erleichterung können Sie dabei die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen a) bis d) benutzen. Skizzieren Sie den Grafen von f_{-1}.