FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

STUDIENKOLLEG

Fach Mathematik	**Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschuleignung** **Musterklausur**	**M**

Von den vier Aufgabenvorschlägen sind **drei** vollständig zu bearbeiten. **Begründen** Sie Ihre Antworten durch Rechnungen oder kurze Texte. Zeichnungen bitte vollständig beschriften.

Bearbeitungszeit : 180 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig)

Vorschlag 1: (Flächenberechnung, Extremwert)

Gegeben sei die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a^2}(4x^2 + x + 3); a \in \mathbb{R}, \mathbf{a > 0}$,

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_a positiv sind. (Hinweis: Untersuchen Sie f_a auf Nullstellen oder bestimmen Sie die Scheitelpunktsform von f_a)

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche $A(a)$ unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ in Abhängigkeit von a .

c) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen und der zu berechnenden Fläche für $a = 2$ auf Millimeterpapier an. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle an den Stellen $0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3$.

Maßstab: x-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 4 cm**; y-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 1 cm.**

d) Berechnen Sie die Flächeninhalt für $a = 2$.

e) Für welchen Wert von $a > 0$ wird der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ minimal?

f) Für welche $a > 0$ ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ gleich 9 ?

g) In welchem Verhältnis teilt der Graph von f_2 das Rechteck aus den Punkten $(0|0)$, $(3|0)$, $(3|f_2(3))$ und $(0|f_2(3))$. Zeichnen Sie das Rechteck in die Zeichnung aus Teil c) ein und benennen Sie die Teilflächen.

h) Für welches $a > 0$ ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $\mathbf{f_2}$ über dem Intervall $[0;a]$ gleich $\frac{9}{8}a^2$?

Vorschlag 2: (Rekonstruktion einer Funktionsgleichung , Fläche zwischen zwei Graphen)

a) Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades, die durch den Ursprung geht, besitzt den Hochpunkt $(2|\,64)$ und an der Stelle $x = -1$ die Tangente $t(x) = -12x - 38$. Wie lautet die Funktionsgleichung von f ? (Lösung zur Kontrolle: $f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 48x$)

b) Für welchen Wert von a schneidet die Funktion $g(x) = 10x^2 + ax$ die Funktion f an der Stelle $x = 3$. Geben Sie **alle** Schnittpunkte an .

c) Berechnen sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f und g .

Vorschlag 3: (Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x+1)^2}$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich;

b) Untersuchen Sie f auf Nullstellen;

c) Untersuchen Sie f auf Symmetrie;

d) Bestimmen Sie das Verhalten von f bei den Definitionslücken mit Hilfe von Grenzwerten und geben Sie gegebenenfalls senkrechte Asymptoten an;

e) Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ (weitere Asymptote);

f) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremal- und Wendepunkte;

g) Legen Sie eine Wertetabelle für $x \in \{-7; -3; 0; 7\}$ an.

h) Zeichnen Sie die Asymptoten und den Graphen von f mit Hilfe der Ergebnisse aus a) bis g) auf Millimeterpapier. Beschriften Sie die Zeichnung vollständig.
Maßstab: x-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 1 cm** , y-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 2 cm.**

Vorschlag 4: (Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Ein Orchester hat 40 Streicher und 30 Bläser. Die Streicher unterteilen sich in 18 Violinen, 10 Bratschen, 8 Celli und 4 Kontrabässe. Unter den Bläsern sind genau ein Horn und eine Posaune.

1. Der Orchesterleiter führt eine Statistik wie viele Stücke in einer Probe gespielt werden. Es ergibt sich folgende Urliste:

Probenummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Zahl der Stücke	4	5	4	2	4	4	5	2	1	4	4	5

   a. Bestimmen Sie die absoluten und die relativen Häufigkeiten für die Zahlen der geprobten Stücke.
   b. Stellen sie die relativen Häufigkeiten in einem geeigneten Diagramm dar.
   c. Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung.

2. Es soll ein Mendelssohn-Oktett für 4 Violinen, 2 Violen und 2 Celli gespielt werden.
   a. Wie viele verschiedene Zusammenstellungen des Oktetts aus den Streichern des Orchesters sind möglich?
   b. Nach dem Auftritt stellen sich die Streicher des Oktetts nebeneinander auf und verbeugen sich. Wie viele mögliche Anordnungen gibt es
      i. insgesamt?
      ii. wenn die beiden Cellisten nebeneinander stehen sollen?
      iii. wenn die Instrumente (nicht die Musiker) betrachtet werden?

3. Bei den wöchentlichen Proben fehlen stets einige Instrumente. Um die Zahl der Anwesenden durch ein Modell zu beschreiben, wird davon ausgegangen, dass die Instrumente unabhängig voneinander und jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % an einer Probe teilnehmen.
   a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Orchesterprobe weniger als 68 Instrumente anwesend sind?
   b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt bei einer Probe entweder das Horn oder die Posaune?
   c. Die beiden bisher verwendeten Modellannahmen für das Vorliegen einer Bernoullikette können in der Realität unzutreffend sein. Erläutern Sie jeweils ein konkretes Beispiel.

Lösungen zur Musterklausur FSP Mathematik für den M-Kurs:

Vorschlag 1: a) keine Nullstellen, $4/a^2 > 0$ oder Tiefpunkt $\left(-\frac{1}{8}\middle|\frac{47}{16a^2}\right)$

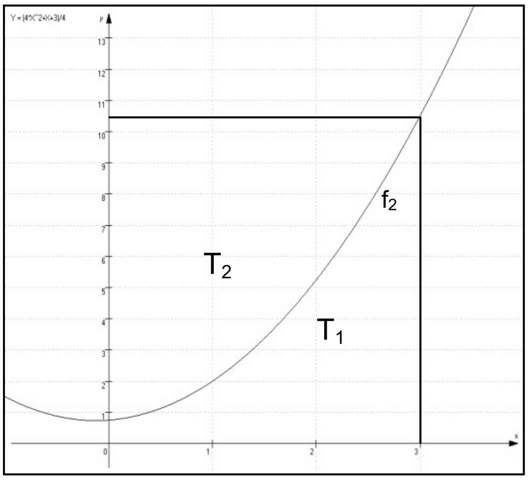
b) $A(a) = \frac{4}{3}a + \frac{1}{2} + \frac{3}{a}$

c) $\frac{3}{4}; \frac{9}{8}; 2; \frac{27}{8}; \frac{21}{4}; \frac{21}{2}$

d) $A(2) = 14/3$

e) $a = 1{,}5$; $A(1{,}5) = 4{,}5$

f) $a_1 = 3/8$, $a_2 = 6$



g) $T_1 = 99/8$; $T_2 = 153/8$; $T_1 : T_2 = 11 : 17 \approx 1 : 1{,}55$

h) $a = 1{,}5$

Vorschlag 2: a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^3 + 2cx + d$

(1) $f(0) = 0$ $\quad$ $e = 0$

(2) $f(2) = 64$ $\quad$ $16a + 8b + 4c + 2d + e = 64$

(3) $f'(2) = 0$ $\quad$ $32a + 12b + +4c + d = 0$

(4) $f'(-1) = -12$ $\quad$ $-4a + 3b - 2c + d = -12$

(5) $f(-1) = -26$ $\quad$ $a - b + c - d + e = -26$

<u>Lösung:</u> $a = 2$; $b = -12$; $c = 8$; $d = 48$

b) $a = -12$, $S_1(0 \mid 0)$, $S_2(3 \mid 54)$, $S_3(5 \mid 190)$, $S_1(-2 \mid 64)$

c) $A_1 = A_3 = \frac{968}{15}; A_2 = \frac{531}{5};\ A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{3529}{15}$

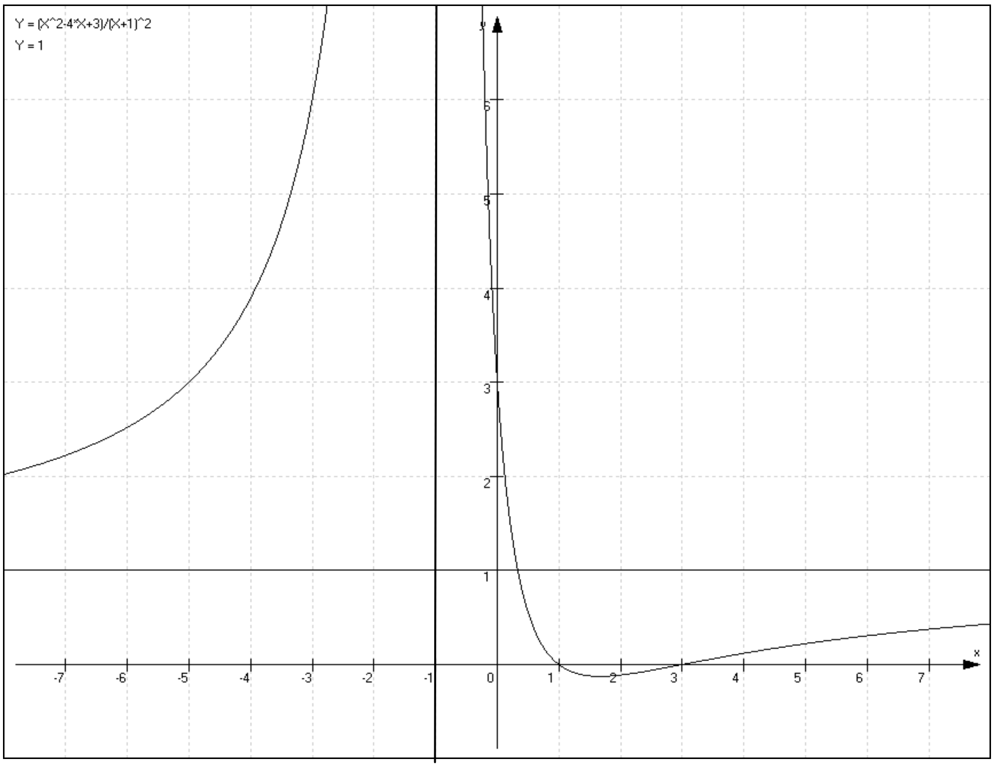
Vorschlag 3: a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ b) $N_1(1|0)$, $N_2(3|0)$

c) weder sym. zum Ursprung noch zur y-Achse

d) −1 ist eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, x = −1 ist eine senkrechte Asymptote.

e) $A(x) = 1$ f) $T\left(\frac{5}{3}\middle|-\frac{1}{8}\right)$; $W(3|0)$ g) $\frac{20}{9}\,;6\,;3\,;\frac{3}{8}$

h)



Vorschlag 4:

1. (a) Absolute Häufigkeit: $H(1)=1$, $H(2)=2$, $H(4)=6$, $H(5)=3$

   Relative Häufigkeit: $h(1)=1/12$, $h(2)=1/6$, $h(4)=1/2$, $h(5)=1/4$

   (b) Kreisdiagramm, Säulendiagramm o.ä.

   (c) Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{12} \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5) = 3.\overline{6}$

   Standardabweichung

$$
\begin{aligned}
s &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{11} \left((1-3.\overline{6})^2 + 2 \cdot (2-3.\overline{6})^2 + 6 \cdot (4-3.\overline{6})^2 + 3 \cdot (5-3.\overline{6})^2 \right)} \\
&= 1.3
\end{aligned}
$$

2. (a) Zahl der Zusammenstellungen $z = \binom{18}{4} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} = 3060 \cdot 45 \cdot 28 = 3855600$

   (b) i. 8!

   ii. 7 mögliche Plätze für die Cellisten, Cellisten tauschen $\cdot 2$. 6! Möglichkeiten für die restlichen Musiker: $Z=6! \cdot 14=10080$

   iii. $Z = \dfrac{8!}{4!\,2!\,2!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4} = 840$

3. (a) Bernoullikette:

$$
\begin{aligned}
P^{70}_{0.9}(Z < 68) &= 1 - P^{70}_{0.9}(Z \geq 67) \\
&= 1 - (P^{70}_{0.9}(Z = 70) + P^{70}_{0.9}(Z = 69) + (P^{70}_{0.9}(Z = 68)) \\
&= 1 - \left((0.9)^{70} + \binom{70}{69} (0.9)^{69} (1-0.9)^{70-69} + \binom{70}{68} (0.9)^{68} (0,1)^{70-68} \right) \\
&= 1 - \left(0.9^{70} + 70 (0.9)^{69} (0.1) + 2415 (0.9)^{68} (0.1)^2 \right) = 0.975 \widehat{=} 97.5\%
\end{aligned}
$$

   (b) P(Horn oder Posaune) = $2 \cdot (0.1 \cdot 0.9) = 0.18 \triangleq 18\%$

   (c) Verletzung der Unabhängigkeit: Freunde kommen zusammen; o.ä

   Verletzung der konstanten Trefferquote von 0.9: Grippewelle; Alternativveranstaltung; ein Teilgruppe fehlt häufiger als eine andere (z.B. berufstätig vs nicht-berufstätig)