Studienkolleg bei den Fachhochschulen
des Freistaates Bayern in Coburg

Feststellungsprüfung Mathematik
Analysis

Arbeitszeit: 90 Minuten **Musterprüfung**

Hilfsmittel: nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + a}{x}$ mit $a \in R$; $D_{f_a} = R \setminus \{0\}$.

1.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Art der Definitionslücke der Funktion f_a.

1.2 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a Anzahl, Vielfachheit und Lage der Nullstellen der Funktion f_a .

1.3 Geben Sie das Verhalten der Funktionen f_a im Unendlichen an.

1.4 Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionen f_a symmetrisch zum Punkt $P(0/-4)$ verlaufen.

1.5 Bestimmen Sie a so, dass die Gerade g: $y = 3x + 4$ Tangente im Punkt $T(-1/1)$ an den Funktionsgraph f_a von ist.

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a(x) = (x-a)\,e^{-x}$ mit $x \in R$ und $a \in R$.

2.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktionen f_a.

2.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen f_a für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

2.3 Bilden Sie die 1. Ableitung $f_a'(x)$ und zeigen Sie, dass gilt:

$f_a(x) = e^{-x} - f_a'(x)$ für alle $x \in R$.

Hinweis: Bilden Sie mit diesem Ergebnis alle weiteren Ableitungen.

2.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte in Abhängigkeit von a.

2.5 Bestimmen Sie den Term der Funktion h (x), auf der alle Extrempunkte der Funktionen f_a liegen.

3.0 Setzen Sie nun $a = -1$. Sie erhalten die Funktion $f_{-1}(x) = (x+1)\,e^{-x}$.

3.1 Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_{-1} in ein kartesisches Koordinatensystem mit 1 LE = 3 cm.

3.2 Geben Sie die Menge aller Stammfunktionen $F_{-1}(x)$ an.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe **2.3**

3.3 Der Graph der Funktion f_{-1} , die x - Achse, die y - Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = t$ mit $t > 0$ begrenzen ein Flächenstück A_t. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_t.

3.4 Berechnen Sie den Grenzwert des Flächeninhalts A_t für $t \to \infty$.