Studienkolleg bei den Fachhochschulen
des Freistaates Bayern in Coburg

Feststellungsprüfung Mathematik
Analytische Geometrie

Arbeitszeit: 90 Minuten **Musterprüfung**

Hilfsmittel: Taschenrechner, Merkhilfe der Mathematik

In allen Aufgaben ist ein kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ vorausgesetzt.

1.0 Gegeben sind die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0$

1.1 Zeigen Sie, dass die Gerade g auf der Ebene E liegt.

1.2 Die Punkte $A(1/1/2)$ und $B(3/b_2/b_3)$ liegen auf der Gerade g. Bestimmen Sie die Koordinaten b_2 und b_3.

1.3 Mit dem Punkt $C(3/-2/-2)$, der nicht auf der Gerade g aber in der Ebene E liegt, wird das Dreieck ABC bestimmt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

1.4 Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $R(2/r_2/4)$. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von r_2.

1.5 Berechnen Sie r_2 so, dass die Länge der Höhe der Pyramide $\sqrt{6}$ LE beträgt.

2.0 Gegeben sind der Punkt $A(0/1/2)$ und die Punktmenge $B_\tau(1/2\tau/3\tau)$ mit $\tau \in \mathbb{R}$.

2.1 Geben Sie die Gleichung der Gerade g an, auf der alle Punkte B_τ liegen.
(Hinweis: Betrachten Sie τ als Parameter)

2.2 Bestimmen Sie τ so, dass B_τ und A die kürzeste Entfernung haben.

2.3 Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E, in der der Punkt A und alle Punkte B_τ liegen. (mögliches Ergebnis: $E: x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 1 = 0$)

2.4 Gegeben ist weiterhin die Ebene $F: x_2 + x_3 - 4 = 0$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgerade s der Ebenen E und F. (Teilergebnis: Richtungsvektor $\vec{u}_s = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$)

2.5 Berechnen Sie den Schnittwinkel φ der Ebenen E und F.

2.6 Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene F.

2.7 Gegeben ist weiterhin die Ebene $H: x_1 + 7x_2 - x_3 - 2 = 0$. Bestimmen Sie die Schnittmenge $\{E \cap F \cap H\}$ und zeigen Sie mit einer Skizze die daraus resultierende gegenseitige Lage der drei Ebenen.

BE	
	FESTSTELLUNGSPRÜFUNG IN MATHEMATIK ***MUSTERPRÜFUNG*** **(TEIL 2 GEOMETRIE)** Arbeitszeit: 90 Minuten Hilfsmittel: Taschenrechner TI / Externe *In allen Aufgaben wird ein kartesisches Koordinatensystem des P^3 vorausgesetzt.*
6	1. Gegeben sind im P^3 die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. 1.1 a) Nennen Sie drei Eigenschaften eines Vektors des P^3. b) Beweisen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in keiner dieser Vektoreigenschaften übereinstimmen. 1.2 Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ *und* $\vec{c}$ eine Basis des Υ^3 bilden.
4	2. Gegeben ist die Schar von Ebenen $E_a : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = a$ mit $a \in \Upsilon$ und der Punkt P(-1|2|-3). Bestimmen Sie a so, dass P den positiven Abstand 2 von E_a hat.
	3. Gegeben sind die Gerade *g*: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Punkte *A*(2|1|3) und *B*(2|5|3).
8	3.1 Die Ebene E enthält die Punkte A und B und verläuft parallel zu g. a) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung von E in Parameter- und Koordinatenform. b) Beschreiben Sie die Lagen von g und E jeweils zum Koordinatensystem. c) Welchen Abstand hat g von E? Begründen Sie Ihre Antwort!
8	3.2 Der Punkt T liegt auf der Geraden g und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von T. b) Errechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABT. c) Bestimmen Sie einen Punkt P, der von A, B und T den gleichen Abstand hat.
4	3.3 Das Dreieck ABT mit T(2|3|5) rotiert um die Seite [AB]. Dabei entsteht ein Doppelkegel. Bestimmen Sie dessen Volumen.
	4. Die Punkte P, Q , R und S bilden die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S. Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Strecken [PQ] und [PR], die Punkte M_3 und M_4 sind die Mittelpunkte der Strecken [QS] und [RS].
4	4.1 Beweisen Sie (ohne Verwendung von Koordinaten) mit Hilfe einer Skizze, dass $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$ gilt.
6	4.2 Die Punkte P, Q , R und S erhalten jetzt Koordinaten: P(6|0|-2), Q (-2|4|-2), R(0|-2|-2) und S(2|2|3). a) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Pyramide PQRS. b) Berechnen Sie das Maß des Winkels α zwischen der Grundfläche der Pyramide und der x_1-x_3-Ebene auf 2 Dezimale gerundet.
40	