FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

STUDIENKOLLEG

Fach Mathematik	**Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschuleignung** **Musterklausur**	**T + W**

Von den vier Aufgabenvorschlägen sind **drei** vollständig zu bearbeiten. **Begründen** Sie Ihre Antworten durch Rechnungen oder kurze Texte. Zeichnungen bitte vollständig beschriften.

Bearbeitungszeit : 180 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig)

Vorschlag 1: (Flächenberechnung, Extremwert)

Gegeben sei die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a^2}(4x^2 + x + 3); a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a > 0}$,

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_a positiv sind. (Hinweis: Untersuchen Sie f_a auf Nullstellen oder bestimmen Sie die Scheitelpunktsform von f_a)

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche $A(a)$ unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ in Abhängigkeit von a .

c) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen und der zu berechnenden Fläche für $a = 2$ auf Millimeterpapier an. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle an den Stellen $0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ 3$.

Maßstab: x-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 4 cm**; y-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 1 cm.**

d) Berechnen Sie die Flächeninhalt für $a = 2$.

e) Für welchen Wert von $a > 0$ wird der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ minimal?

f) Für welche $a > 0$ ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ gleich 9 ?

g) In welchem Verhältnis teilt der Graph von f_2 das Rechteck aus den Punkten $(0|0)$, $(3|0)$, $(3|f_2(3))$ und $(0|f_2(3))$. Zeichnen Sie das Rechteck in die Zeichnung aus Teil c) ein und benennen Sie die Teilflächen.

h) Für welches $a > 0$ ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $\mathbf{f_2}$ über dem Intervall $[0;a]$ gleich $\frac{9}{8}a^2$?

Vorschlag 2: (Rekonstruktion einer Funktionsgleichung , Fläche zwischen zwei Graphen)

a) Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades, die durch den Ursprung geht, besitzt den Hochpunkt (2| 64) und an der Stelle $x = -1$ die Tangente $t(x) = -12x - 38$. Wie lautet die Funktionsgleichung von f ? (Lösung zur Kontrolle: $f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 48x$)

b) Für welchen Wert von a schneidet die Funktion $g(x) = 10x^2 + ax$ die Funktion f an der Stelle $x = 3$. Geben Sie **alle** Schnittpunkte an .

c) Berechnen sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f und g .

Vorschlag 3: (Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x+1)^2}$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich;

b) Untersuchen Sie f auf Nullstellen;

c) Untersuchen Sie f auf Symmetrie;

d) Bestimmen Sie das Verhalten von f bei den Definitionslücken mit Hilfe von Grenzwerten und geben Sie gegebenenfalls senkrechte Asymptoten an;

e) Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ (weitere Asymptote);

f) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremal- und Wendepunkte;

g) Legen Sie eine Wertetabelle für $x \in \{-7; -3; 0; 7\}$ an.

h) Zeichnen Sie die Asymptoten und den Graphen von f mit Hilfe der Ergebnisse aus a) bis g) auf Millimeterpapier. Beschriften Sie die Zeichnung vollständig.
<u>Maßstab</u>: x-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 1 cm** , y-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 2 cm.**

Vorschlag 4: (Analytische Geometrie)

Gegeben seien zwei Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 in einer Ebene E_1 liegen, indem Sie nachweisen, dass sie sich schneiden. Geben Sie den Schnittpunkt an.

b) Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene E_1 an.

c) Berechnen Sie die Spurgerade von E_1 in der xz-Ebene.

d) Geben Sie eine Normalengleichung der Ebene $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ an.

e) Welche Lage nehmen die Ebenen E_1 und E_2 zueinander ein? Berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

Gegeben sei weiter eine dritte Gerade g_3 , die durch die Punkte $P(-2 \mid 11 \mid 5)$ und $Q(6 \mid 11 \mid 7)$ geht:

f) Bestimmen Sie die Spurpunkte von g_3 in der xy-Ebene und der xz-Ebene.

g) Welche Lage nimmt die Gerade g_3 zur Ebene E_2 ein? Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt und Schnittwinkel bzw. den Abstand.

Fach Mathematik	Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschuleignung - Musterklausur	T und W

Von den vier Aufgaben sind **drei** vollständig zu bearbeiten.
Achten Sie auf vollständige, nachvollziehbare und ordentliche Darstellung bzw. Beschreibung von Lösungswegen und Lösungen. Verwenden Sie für die Lösungen das Klausurpapier. Das Konzeptpapier wird nicht bewertet. Schreiben Sie mit nicht-radierbaren Kugelschreiber oder Füller. Der Bleistift darf nur für Zeichnungen verwendet werden. Korrekturroller oder -marker sowie Tintenlöscher sind nicht erlaubt. Elektronische Hilfsmittel außer die untern angegebenen sind nicht erlaubt.
Notieren Sie auf allen Blättern Ihren Namen. Nummerieren Sie die Seiten Ihrer Lösung (auch die vom Millimeterpapier).

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Lineal/Geodreieck, Wörterbuch (wird gestellt),
Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig, wird gestellt)

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = axe^x - 2e^x$ mit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

a) Bestimmen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

b) Untersuchen Sie $f_a(x)$ auf Nullstellen.

c) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen von $f_a(x)$.

d) Untersuchen Sie $f_a(x)$ auf Extrempunkte und deren Art (Hoch- und Tiefpunkte).

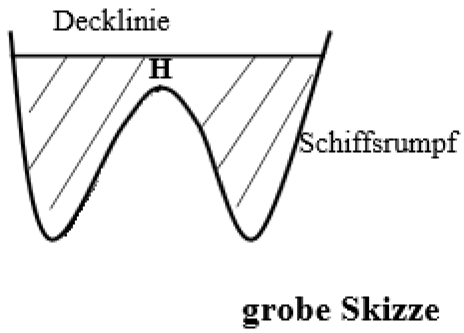
e) Sei $a \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie $f_a(x)$ auf Wendepunkte.

Kontrollergebnis Wendepunkt: $W(\frac{2-2a}{a} | -2ae^{\frac{2-2a}{a}})$

f) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von $f_a(x)$.

g) Sei a = 1. Geben Sie $f_1(x)$ an. Geben Sie die Nullstellen, die Extrema und die Wendepunkte für $f_1(x)$ an. Erstellen Sie eine Wertetabelle für die ganzzahligen x-Werte und den Randbereich des Intervalls I = [-5; 2,5] von $f_1(x)$. Zeichnen Sie den Graphen $f_1(x)$ für das Intervall I anhand der Wertetabelle und den besonderen Punkten auf das Millimeterpapier. Kennzeichnen Sie die besonderen Punkte im Graphen.

Aufgabe 2:



Es wird ein neues Doppelrumpfschiff (Katamaran) geplant. Der mittlere Teil des Schiffsrumpfes wird im Querschnitt nach der Funktion $f(x) = 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2$ hergestellt.

Die waagerechte Decklinie liegt in einer Höhe von 1 Einheit über dem Hochpunkt H.

a) Zeigen Sie, dass f(x) achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

b) Bestimmen Sie, wie groß der senkrechte Abstand der Tiefpunkte von der Decklinie ist. Schreiben Sie einen Antwortsatz.

c) Bestimmen Sie die Länge der Decklinie. Schreiben Sie einen Antwortsatz.

d) Die Wertetabelle für f(x) ist vorgegeben:

<u>Wertetabelle von f(x):</u>

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0,5	1	1,5	2
y	1,6	-1,07	-1,1	-0,37	-0,37	-1,1	-1,07	1,6

i. Bestimmen Sie die Nullstellen von f(x).

ii. Geben Sie den Hochpunkt an. Zeichnen Sie den Graphen von f(x) anhand der bisherigen Ergebnisse und Werte zusammen mit der Decklinie in ein geeignetes Koordinatensystem auf Millimeterpapier. Kennzeichnen Sie die besonderen Punkte im Graphen.

e) Berechnen Sie die Fläche, die durch f(x) und die x-Achse eingeschlossen wird.

f) Berechnen Sie die gesamte Querschnittsfläche, die durch f(x) und der Decklinie eingeschlossen wird.

Aufgabe 3:

Eine ganzrationale Funktion f sechsten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Die Funktion f besitzt an der Stelle x = 1 einen Tiefpunkt und schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|0{,}5)$. Die Steigung f an der Stelle x = 0,5 beträgt $-\frac{9}{8}$. Das bestimmte Integral von f auf dem Intervall I = [-0,5; 0] hat den Wert $\frac{523}{2240}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f.
   Hinweis: Rundungen sind nicht erlaubt!
b) Eine Nullstelle von f(x) liegt bei $N_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}|0)$. Bestimmen Sie alle Nullstellen von f(x).
c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den die Funktion f mit der x-Achse einschließt.

Kontrollergebnisse: $f(x) = 2x^6 - 3x^4 + \frac{1}{2}$, $\quad N_3(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}|0)$

Hinweis: Verwendete Informationen aus dem Kontrollergebnis gelten nicht als Lösungsnachweis! Sie sind nur für die folgenden Aufgaben, wenn man kein oder ein falsches Ergebnis erhalten hat, zu verwenden.

Aufgabe 4:

Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2.

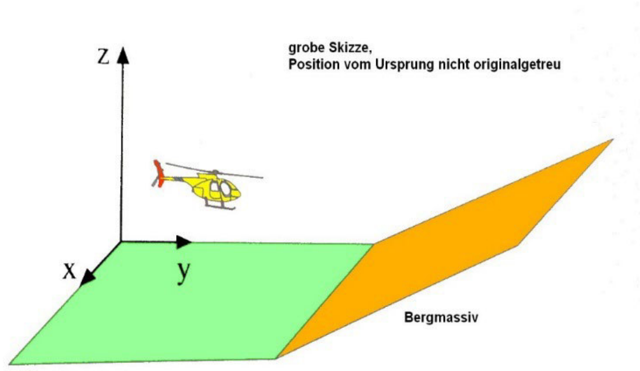
$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \; mit\; r, s, u, v \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E_1.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatenform der Ebene E_1. Kennzeichnen Sie ihr Ergebnis.

c) Bestimmen Sie die Schnittgerade g von E_1 und E_2.

d) Ein Helikopter fliegt auf ein eben ansteigendes Bergmassiv zu, welches durch die Punkte A(-2|0|0) und B(0|-2|0) und C beschrieben wird.



i. Bestimmen Sie, ob durch die Punkte A, B und C entweder die Ebene E_1 oder E_2 beschrieben werden kann. Schreiben Sie einen Antwortsatz.

ii. Bestimmen Sie den Punkt C, der den z-Achsenabschnitt von der beschriebenen Ebene in Aufgabe 4 d) i. beschreibt.

iii. Zeichnen Sie das Schrägbild der bestimmten Ebene in Aufgabe 4 d) i. Kennzeichnen Sie dabei die verwendeten Punkte und schraffieren Sie den gezeichneten Ausschnitt der Ebene.

<u>Hinweis Schrägbild zeichnen:</u> Die drei Koordinatenachsen (x-Achse, y-Achse, z-Achse) stehen im Koordinatenursprung senkrecht aufeinander. Im Schrägbild wird die x-Achse allerdings unter einem Winkel von 135° zu den beiden anderen Achsen gezeichnet, um einen Raumeindruck entstehen zu lassen. Die Einheit auf der x-Achse wird mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verkürzt, damit ein realer Eindruck entsteht. Für die y-Achse und die z-Achse wird ein cm als eine Längeneinheit gewählt.

e) Der Helikopter misst auf seinem Flug, dass er den Punkt P(2|-2|1) durchfliegt.

i. Bestimmen Sie, wie groß der Abstand zwischen dem gemessenen Flugpunkt P und dem Bergmassiv ist. Schreiben Sie einen Antwortsatz.

ii. Bestimmen Sie, ob die Messung von Punkt P richtig sein kann. Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösungen zur Musterklausur FSP Mathematik für den W-Kurs:

Vorschlag 1: a) keine Nullstellen, $4/a^2 > 0$ oder Tiefpunkt $\left(-\frac{1}{8}\middle|\frac{47}{16a^2}\right)$

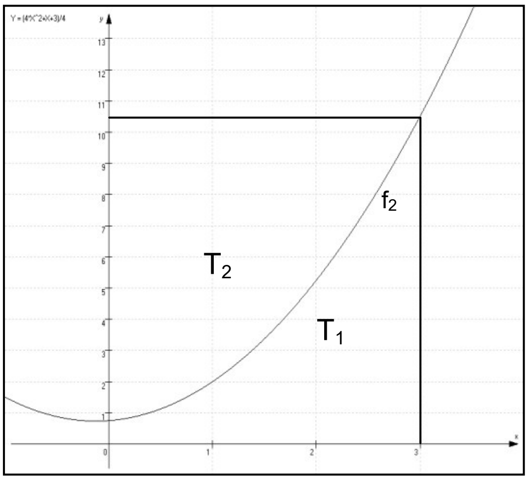
b) $A(a) = \frac{4}{3}a + \frac{1}{2} + \frac{3}{a}$

c) $\frac{3}{4}; \frac{9}{8}; 2; \frac{27}{8}; \frac{21}{4}; \frac{21}{2}$

d) $A(2) = 14/3$

e) $a = 1{,}5$; $A(1{,}5) = 4{,}5$

f) $a_1 = 3/8$, $a_2 = 6$



g) $T_1 = 99/8$; $T_2 = 153/8$; $T_1 : T_2 = 11 : 17 \approx 1 : 1{,}55$

h) $a = 1{,}5$

Vorschlag 2: a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^3 + 2cx + d$

(1) $f(0) = 0$ $\qquad e = 0$

(2) $f(2) = 64$ $\qquad 16a + 8b + 4c + 2d + e = 64$

(3) $f'(2) = 0$ $\qquad 32a + 12b + +4c + d = 0$

(4) $f'(-1) = -12$ $\qquad -4a + 3b - 2c + d = -12$

(5) $f(-1) = -26$ $\qquad a - b + c - d + e = -26$

<u>Lösung:</u> $a = 2$; $b = -12$; $c = 8$; $d = 48$

b) $a = -12$, $S_1(0 \mid 0)$, $S_2(3 \mid 54)$, $S_3(5 \mid 190)$, $S_1(-2 \mid 64)$

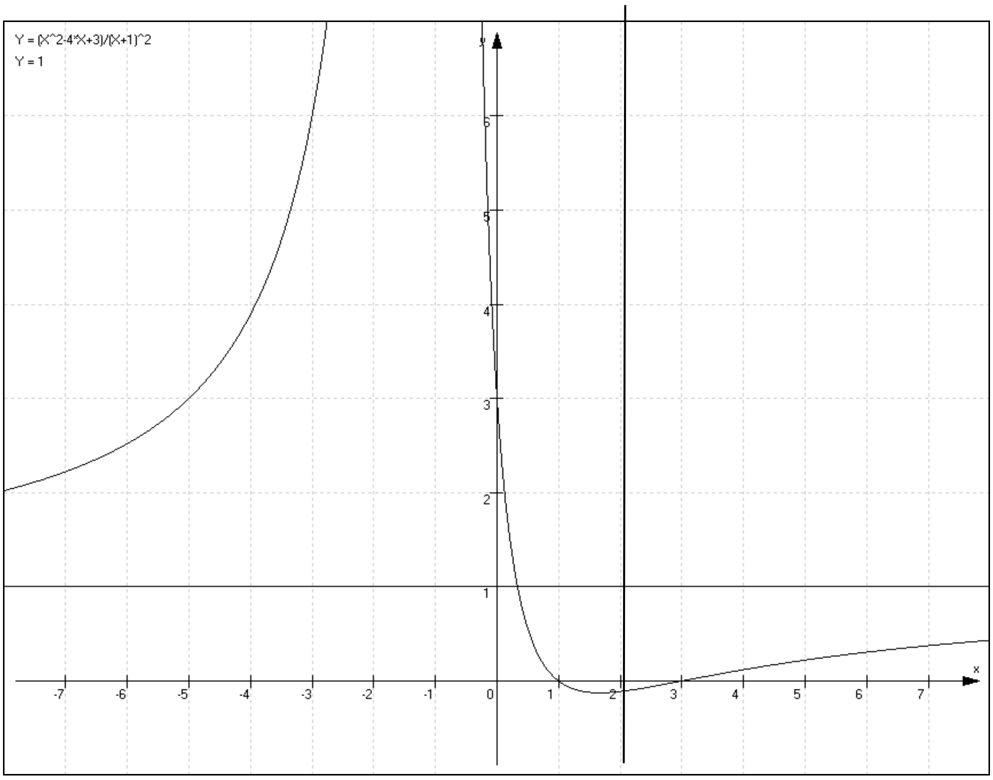
c) $A_1 = A_3 = \frac{968}{15}; A_2 = \frac{531}{5};\ A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{3529}{15}$

Vorschlag 3: a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ b) $N_1(1|0)$, $N_2(3|0)$

c) weder sym. zum Ursprung noch zur y-Achse

d) −1 ist eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, x = −1 ist eine senkrechte Asymptote.

e) A(x) = 1 f) $T\left(\frac{5}{3}\middle|-\frac{1}{8}\right)$; $W(3|0)$ g) $\frac{20}{9}\,;6\,;3\,;\frac{3}{8}$

h) 

Vorschlag 4: a) S(5,2 |−5,4|−4,2) b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $g_{xz}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $E_2: \vec{x}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -18$ e) $g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1{,}5 \\ -0{,}75 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $P_{xy}(-22 \mid 11 \mid 0)$, P_{xz} existiert nicht g_3 ist parallel zu E_2 , $d(g_3, E_2) = 2\sqrt{53} \approx 14{,}6$

Muster FSP T-Kurs

Aufgabe 1:

a) für $a > 0$:

$$\lim_{x\to\infty}(axe^x - 2e^x) = \lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^x}_{\to\infty}(\underbrace{ax-2}_{\to\infty})) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{\to 0}(\underbrace{ax-2}_{\to-\infty})) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{ax-2}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{-x}}_{\to\infty}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a}{\underbrace{-e^{-x}}_{\to\infty}} = 0$$

für $a < 0$:

$$\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^x}_{\to\infty}(\underbrace{ax-2}_{\to-\infty})) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{ax-2}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{-x}}_{\to\infty}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a}{-e^{-x}} = 0$$

8 min

b) $f_a(x) = 0$

$e^x(ax-2) = 0$

$\Rightarrow\ ax - 2 = 0$ weil $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow\ x = \frac{2}{a}$ (für $a \neq 0$)

3 min

c) $f_a'(x) = ae^x + (ax-2)e^x = (ax+a-2)e^x$

$f_a''(x) = (ax+2a-2)e^x$

$f_a'''(x) = (ax+3a-2)e^x$

6 min

d) notwendiges Kriterium: $f_a'(x) = 0$

$(ax+a-2)e^x = 0$

$\Rightarrow\ ax + a - 2 = 0$ weil $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow\ x = \frac{-a+2}{a} = -1 + \frac{2}{a}$ (für $a \neq 0$)

hinreichendes Kriterium: $f_a''(x_E) \lessgtr 0$

$f_a''(-1+\frac{2}{a}) = (a\frac{-a+2}{a} + 2a - 2)e^{\frac{-a+2}{a}} = a \cdot e^{\frac{-a+2}{a}}$

weil $e^{\frac{a-2}{a}} > 0\ \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ wird a betrachtet

$$a \begin{cases} > 0 & \text{für } a > 0 \Rightarrow \text{Minimum}, T\left(\frac{-a+2}{a} \middle| -ae^{\frac{-a+2}{a}}\right) \\ < 0 & \text{für } a < 0 \Rightarrow \text{Maximum}, H\left(\frac{-a+2}{a} \middle| -ae^{\frac{-a+2}{a}}\right) \end{cases}$$

$f_a\left(\frac{-a+2}{a}\right) = (-a+2)e^{\frac{-a+2}{a}} - 2e^{\frac{-a+2}{a}} = -ae^{\frac{-a+2}{a}}$ 10 min

e) notwendiges Kriterium: $f_a''(x) = 0$

$(ax + 2a - 2)\, e^x = 0$

$\Rightarrow \quad ax + 2a - 2 = 0$ weil $e^x > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-2a+2}{a}$ für $a \neq 0$

hinreichendes Kriterium: $f_a'''(x_w) \neq 0$

$f_a'''\left(\frac{-2a+2}{a}\right) = (-2a + 2 + 3a - 2)\, e^{\frac{-2a+2}{a}}$ $>0 \;\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$= a \cdot e^{\frac{-2a+2}{a}}$ $\neq 0$ $>0 \;\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W\left(\frac{-2a+2}{a} \,\middle|\, -2a \cdot e^{\frac{2-2a}{a}}\right)$

$f_a\left(\frac{-2a+2}{a}\right) = (-2a+2-2)e^{\frac{-2a+2}{a}} = -2ae^{\frac{-2a+2}{a}}$

Fall $a = 0$: $f_0(x) = -2e^x \Rightarrow$ keine Wendepunkte (einfache exponentielle Funktion)

9 min

f) $t_w(x) = mx + n$

$m = f_a'\left(\frac{2-2a}{a}\right) = (2 - 2a + a - 2)e^{\frac{2-2a}{a}} = -ae^{\frac{2-2a}{a}}$

W, m in $t_w(x)$ einsetzen:

$-2ae^{\frac{2-2a}{a}} = -ae^{\frac{2-2a}{a}} \cdot \left(\frac{-2a+2}{a}\right) + n$

$\Rightarrow \quad -2a \cdot e^{\frac{2-2a}{a}} = (2a+2)\, e^{\frac{2-2a}{a}} + n$

$\Rightarrow \quad n = (-4a+2)\, e^{\frac{2-2a}{a}}$

n, m in $t_w(x)$ einsetzen:

$t_w(x) = -ae^{\frac{2-2a}{a}} \cdot x + (-4a+2)e^{\frac{2-2a}{a}}$ 7 min

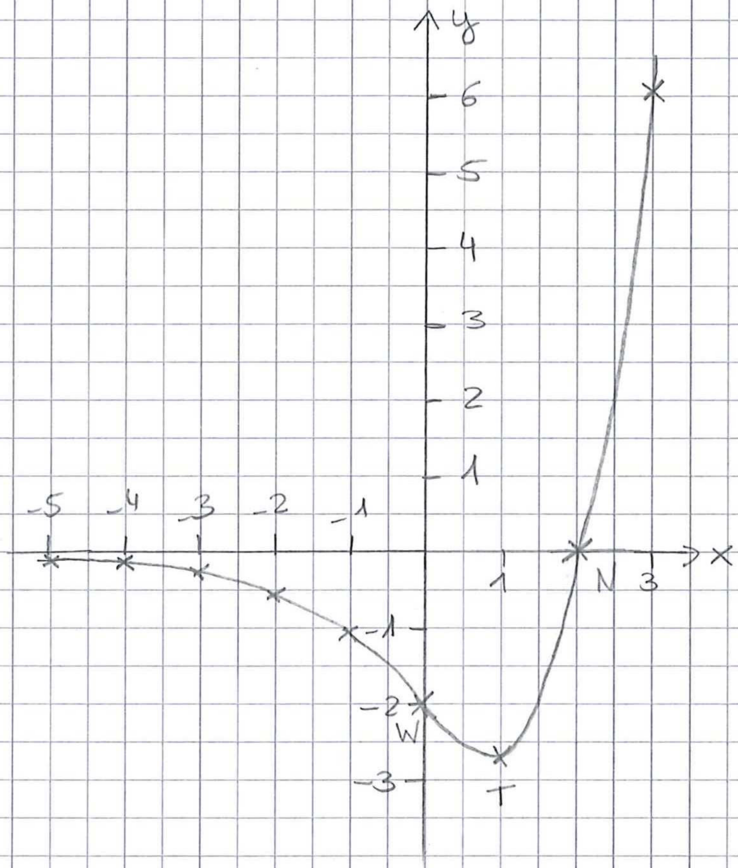
g) $f_1(x) = xe^x - 2e^x$

$N_1(2|0)$, $T(1|-2{,}72)$, $W(0|-2)$

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	-0,05	-0,11	-0,25	-0,54	-1,1

x	0	1	2	2,5
y	-2	-2,72	0	6,09

7 min



10 min

Lesen: 5 min

Aufgabe 2:

a) $f(x) = 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2$
$f(-x) = 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2$ $\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse

alternative Lösung:
ganzrationale Funktion mit nur geraden Exponenten $\Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse

3 min

b) $f'(x) = 2x^3 - 3{,}2x$
$f''(x) = 6x^2 - 3{,}2$
notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$
$2x^3 - 3{,}2x = 0$
$\Rightarrow 2x(x^2 - 1{,}6) = 0$
$\Rightarrow x = 0 \lor x^2 - 1{,}6 = 0$
$\Rightarrow x^2 = 1{,}6$
$\Rightarrow x = \sqrt{1{,}6} \lor x = -\sqrt{1{,}6}$
hinreichendes Kriterium: $f''(x_E) > 0$
$f''(0) = -3{,}2 < 0 \Rightarrow$ Maximum
$f''(\sqrt{1{,}6}) = f''(-\sqrt{1{,}6}) = 6 \cdot 1{,}6 - 3{,}2 = 6{,}4 > 0$
$\Rightarrow$ Minimum

9 min

$g_{\text{Decklinie}}(x) = 1$
$f(\sqrt{1{,}6}) = f(-\sqrt{1{,}6}) = -1{,}28$
Abstand: $d = |-1{,}28| + 1 = 2{,}28$
A: Der Abstand der Tiefpunkte zur Decklinie beträgt 2,28 Längeneinheiten.

5 min

c) Länge der Decklinie = Abstand der Schnittpunkte von $f(x)$ und $g_{\text{Decklinie}}(x)$
$f(x) = g(x)$
$0{,}5x^4 - 1{,}6x^2 = 1$
$\Rightarrow 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2 - 1 = 0$

$x^2 = t$ (Substitution)

$\Rightarrow f(t) = 0{,}5t^2 - 1{,}6t - 1 \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow t^2 - 3{,}2t - 2 = 0$

$\Rightarrow t_{1/2} = 1{,}6 \pm \sqrt{1{,}6^2 + 2} = 1{,}6 \pm \sqrt{4{,}56}$

$t_1 \approx 3{,}74 \quad \wedge \quad t_2 = -0{,}54$

(Resubstitution:)

$x_{1/2} = \pm\sqrt{-0{,}54}$ keine Lösung

$x_{3/4} = \pm\sqrt{3{,}74} \approx \pm 1{,}93$

Länge: $\ell = |-1{,}93| + 1{,}93 = 3{,}86$

alternativ: $\ell = 2 \cdot 1{,}93 = 3{,}86$

A: Die Länge der Decklinie beträgt ca. 3,86 Längeneinheiten.

10min

d) i. $f(x) = 0$

$x^2(0{,}5x^2 - 1{,}6) = 0$

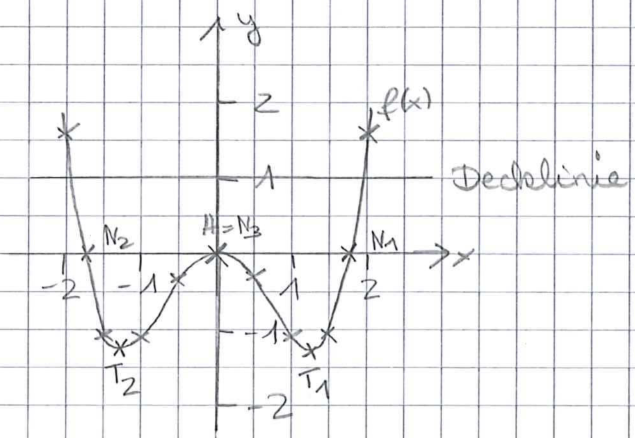
$\Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad 0{,}5x^2 - 1{,}6 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 3{,}2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3{,}2} \approx \pm 1{,}79$

5min

ii. $H(0|0)$



12min

e) $A = 2 \cdot \left| \int_0^{1{,}93} 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2 - 1 \, dx \right|$

$= 2\left| \left[0{,}1x^5 - \frac{8}{15}x^3 - x \right]_0^{1{,}93} \right|$

$\approx 2|((2{,}678 - 3{,}834 - 1{,}93) - 0)|$

$\approx 6{,}17$

6min

f) $A = 2 \cdot \left| \int_{-1{,}79}^{0} 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2 \right|$

$= 2 \left| \left[0{,}1x^5 - \frac{8}{15}x^3 \right]_{-1{,}79}^{0} \right|$

$= 2 \cdot \left| (0 - (-1{,}838 + 3{,}059)) \right|$

$\approx 2{,}44$

5 min

Quelle:

Aufgabenidee und Bild entnommen aus:

http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/a/ga2/HH2007gk13%20-%20Schiffbau.pdf, letztes Zugriffsdatum: 21.3.2016

lesen: 5 min

Aufgabe 3:

a) achsensymmetrisch zur y-Achse

$\Rightarrow$ nur gerade Exponenten

$f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$, $f'(x) = 6ax^5 + 4bx^3 + 2cx$

T bei $x = 1$: $f'(1) = 0$ I

$P(0|0{,}5)$: $f(0) = 0{,}5 \Rightarrow d = 0{,}5$

Steigung an der Stelle $x = 0{,}5$: $f'(0{,}5) = -\frac{9}{8}$ II

9 min Integral: $\int_{-0{,}5}^{0} f(x)\,dx = \frac{523}{2240}$

mit $d = 0{,}5 \Rightarrow \int_{-0{,}5}^{0} ax^6 + bx^4 + cx^2 + 0{,}5\,dx = \frac{523}{2240}$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{7}ax^7 + \frac{1}{5}bx^5 + \frac{1}{3}cx^3 + 0{,}5x\right]_{-0{,}5}^{0} = \frac{523}{2240}$

$\Rightarrow 0 - \left(-\frac{1}{896}a - \frac{1}{160}b - \frac{1}{24}c - 0{,}25\right) = \frac{523}{2240}$

5 min $\Rightarrow \frac{1}{896}a + \frac{1}{160}b + \frac{1}{24}c = \frac{-37}{2240}$ III

LGS:

I $6a + 4b + 2c = 0$

II $\frac{3}{16}a + 0{,}5b + c = -\frac{9}{8}$

III $\frac{1}{896}a + \frac{1}{160}b + \frac{1}{24}c = \frac{-37}{2240}$

I $- 32 \cdot$ II : II' $-12b - 30c = 36$

I $- 5376$ III : III' $-29{,}6b - 222c = 88{,}8$

$29{,}6 \cdot$ II' $- 12 \cdot$ III' $1776c = 0 \Rightarrow c = 0$

c in II' einsetzen: $-12b = 36 \Rightarrow b = -3$

b, c in I einsetzen: $6a - 12 = 0 \Rightarrow a = 2$

12 min $f(x) = 2x^6 - 3x^4 + 0{,}5$

b) $N_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}|0)$, achsensymmetrisch zur y-Achse

$\Rightarrow N_2(\frac{1}{\sqrt{2}}|0)$

$\Rightarrow (2x^6-3x^4+\frac{1}{2}):((x-\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(x+\frac{1}{\sqrt{2}})) = g(x)$

$\Rightarrow (2x^6-3x^4+\frac{1}{2}):(x^2-\frac{1}{2}) = 2x^4-2x^2-1$

$\underline{-(2x^6-x^4)}$

$-2x^4$

$\underline{-(-2x^4+x^2)}$

$-x^2+\frac{1}{2}$

$\underline{-(-x^2+\frac{1}{2})}$

0

10 min

$g(x)=0$

$x=t^2$ (Substitution)

$2t^2-2t-1=0$

$\Rightarrow t^2-t-\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow t_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \wedge t_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

(Resubstitution:) $x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$ nicht lösbar

$x_{3/4}=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \approx \pm 1{,}17$

8 min

c) $A=\left|2\cdot\int_0^{+\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x^6-3x^4+\frac{1}{2}\,dx\right|+\left|2\cdot\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1,17} 2x^6-3x^4+\frac{1}{2}\,dx\right|$

$=\left|2\left[\frac{2}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+\left|2\left[\frac{2}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1,17}\right|$

$\approx|2(0{,}2727-0)|+|2(0{,}1270-0{,}2727)|$

$\approx 0{,}84$

11 min

lesen: 5 min

Aufgabe 4: Bild und Idee aus: ISBN 978-3-06-040013-3, S. 185

a)

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -3+6 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

5 min $E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

b)

$$d = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 - 3 - 4 = -2$$

3 min $E_1: x + y - z = -2$

c) E_2 in E_1 einsetzen:

$(3 + 2u + 2v) + (1 - 2u - 4v) - (3 + 5u - 3v) = -2$

$\Rightarrow -5u + v = -3$

$\Rightarrow v = -3 + 5u$

v in E_2 einsetzen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + (-3 + 5u) \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 12 \\ -22 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}$$

7 min

d) i) A in E_1 einsetzen: $-2 = -2$ ✓ $\Rightarrow A \in E_1$

B in E_1 einsetzen: $-2 = -2$ ✓ $\Rightarrow B \in E_1$

überprüfen, ob A (oder B) auf der Schnittgeraden g liegt

alternativ: prüfen, ob $A \in E_2$ oder $B \in E_2$

$A \in E_2$?

$\Rightarrow$ LGS: I $\quad -2 = -3 + 12u$

II $\quad 0 = 13 - 22u \quad \Rightarrow u = -\frac{13}{22}$

III $\quad 0 = 12 - 10u \quad \Rightarrow u = -\frac{12}{10}$

$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow A \notin E_2$

A: Durch die Punkte A, B und C wird die Ebene E_1 beschrieben.

8 min

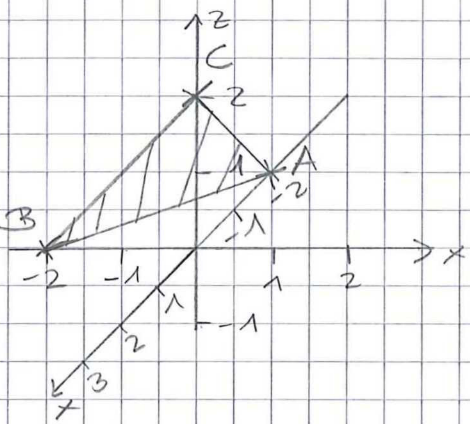
ii. $C(0|0|z)$ in E_1 einsetzen:

$-z = -2 \Rightarrow z = 2$

$C(0|0|2)$

3 min

iii.



10 min

e)

i. $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$d(P;E) = \left|\left[\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}(-3+1+3)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$$

A: Der Abstand von P zum Bergmassiv beträgt ca. 0,58 Längeneinheiten.

10 min

ii.

$$\begin{pmatrix}2\\-2\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ LGS:

I $\quad 2 = 5 + 3r - 3s$

II $\quad -2 = -3 - 2r + s$

III $\quad z = 4 + r - 2s$

I+3·II: $-4 = -4 - 3r \Rightarrow r = 0$

r in I einsetzen: $2 = 5 - 3s \Rightarrow s = 1$

r, s in III einsetzen: $z = 4 - 2 = 2 > 1$

Die Messung kann nicht stimmen, weil sich der Helikopter unter dem Bergmassiv befinden würde.

9 min