Technische Universität Berlin

Internationales Studienkolleg
International Affairs Preparatory Course

Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Eignung ausländischer Studienbewerber*innen zum Hochschulstudium im Lande Berlin

für wirtschaftswissenschaftliche Studiengänge (Feststellungsprüfung für W-Kurse)

Sommersemester 2021

Mathematik

Die Aufgabe zur Wirtschaftsmathematik ist obligatorisch zu lösen.
Von den verbleibenden 3 Aufgaben sind 2 nach eigener Wahl zu lösen.
In jeder Aufgabe können 20 Punkte erreicht werden.
Bei schlechter äußerer Form sind pro Aufgabe 10% Abzug möglich.

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner (nicht-grafisch, nicht programmierbar), einsprachiges, deutsches Wörterbuch

Name: ______________________________

Prüfungsgruppe: ______________________________

Eingereicht von: ______________________________

Geprüft von: ______________________________

Internationales
International Affairs

Aufgabe 1: Kurvendiskussion (Wahlaufgabe) 20 Punkte

Gegeben ist folgende punktsymmetrische Funktion mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus [-4;4] =]-\infty;-4[\cup]4;\infty[$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ln(x-4)}{x-4} & , \quad x > 4 \\ -\dfrac{ln(-x-4)}{-x-4} & , \quad x < -4 \end{cases}$$

Verwenden Sie die Symmetrieeigenschaften für die weitere Funktionsuntersuchung.

a) Untersuchen Sie das Randverhalten der Funktion. (2 Pkte)

b) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$ für $x > 4$. (4 Pkte)

Hinweis: Sie sollten für die zweite Ableitung folgende Lösung erhalten:

$$f''(x) = \frac{2\,ln(x-4) - 3}{(x-4)^3}$$

c) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen sowie die Lage und die Art aller Extrem- und Wendepunkte. Nutzen Sie für den Nachweis der Wendepunkte das VZW-Kriterium. (8 Pkte)

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 4 + e$. (2 Pkte)

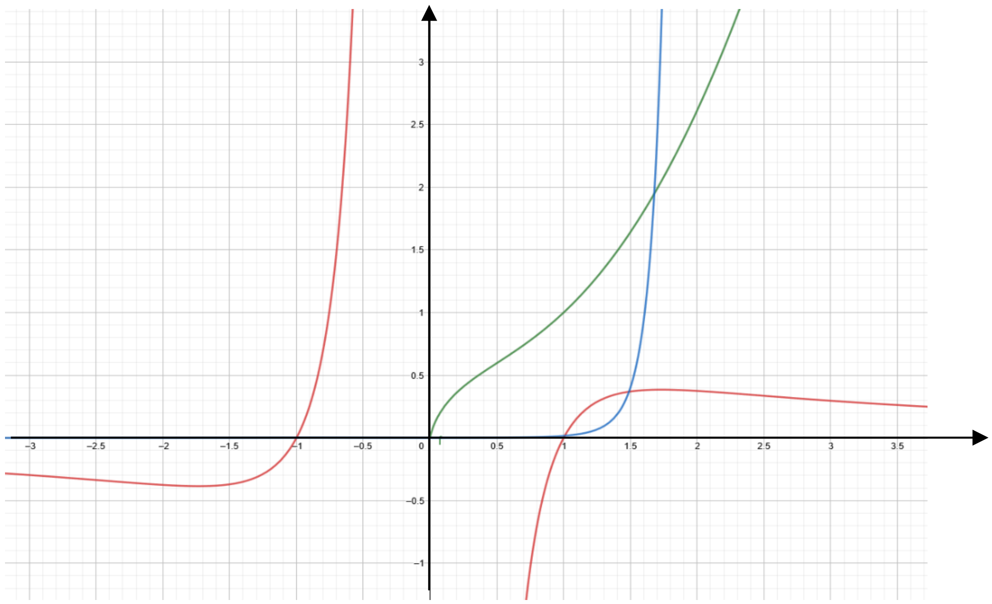
e) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen und tragen Sie alle Ergebnisse der Rechnung ein.
Skalierung: x-Achse 1LE = 0,5 cm, y-Achse 1LE = 5 cm (4 Pkte)

Aufgabe 2: Integralrechnung (Wahlaufgabe) 20 Punkte

Gegeben sind die drei Funktionen

$$f(x) = x^2 - x \cdot ln(x) \qquad g(x) = \frac{x^2}{3} \cdot e^{x^3-4} \qquad h(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$$

deren Funktionsgraphen untenstehend skizziert worden sind.



a) Berechnen Sie durch Integration folgende Stammfunktionen: (6 Pkte.)

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \cdot ln(x) \qquad G(x) = \frac{e^{x^3-4}}{9} \qquad H(x) = \frac{1}{2x^2} + ln|x|$$

b) Die Funktionen g und h schließen im 1. Quadranten eine Fläche ein. Sie dürfen ohne Rechnung verwenden, dass die Schnittpunkte ungefähr bei $A(1|0)$ und $B(1{,}5|0{,}36)$ liegen. Berechnen Sie die eingeschlossene Fläche. (3 Pkte.)

c) Berechnen Sie die Fläche, die f im Bereich $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ mit der x-Achse einschließt. (3 Pkte.)

d) Betrachten Sie $f_a(x) = a \cdot f(x)$. Für welches $a \in \mathbb{R}^+$ schließt f_a mit der x-Achse im Bereich $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ eine Fläche von 1 Flächeneinheit ein? (2 Pkte.)

e) Bestimmen Sie $b \in [1; \infty[$ so, dass die Funktion g mit der x-Achse im Bereich $[1; b]$ eine Fläche von $\frac{8}{9e^3}$ einschließt. (3 Pkte.)

f) Folgende Regel gilt **nicht**. Begründen Sie kurz und geben Sie ein Gegenbeispiel. (3 Pkte.)

$$\int f^2(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)^2$$

Aufgabe 3: Wirtschaftsmathematik (Pflichtaufgabe) 20 Punkte

Die Formelsammlung zur Wirtschaftsmathematik finden Sie auf Seite 5.

Herr Müller hat Anteile einer Geschäftsbeteiligung verkauft und möchte den Erlös von 65.000,- € am Jahresanfang zinseszinslich anlegen, um nach 20 Jahren ein Guthaben von mindestens 150.000,- € zu erreichen.

a) Wie hoch muss der Jahreszinssatz mindestens sein, wenn mit einer Zinsperiode von 1 Jahr gerechnet wird?
   Wie hoch müsste der Jahreszinssatz mindestens sein, wenn mit einer Zinsperiode von nur 3 Monaten gerechnet würde?
   Welcher Jahreszinssatz müsste mindestens erreicht werden, wenn durch Aktienspekulationen noch kürzere Zinsperioden möglich sind?
   Geben Sie die Jahreszinssätze in Prozent mit 2 Nachkommastellen an! (5 Pkte.)

Herr Müller hat jetzt durch weitere Anteilsverkäufe ein Grundkapital von 250.000,- € und möchte aus diesem Guthaben gleich hohe Rentenraten abheben. Rechnen Sie mit einer zinseszinslichen Verzinsung des Guthabens von 3,0 % p.a. bei einer Zinsperiode von 1 Jahr.

b) Wie viele ganze Jahre kann Herr Müller monatlich vorschüssig 1.500,- € höchstens abheben, wenn er mit der Abhebung für den Monat Januar beginnt?
   Wie hoch ist am Jahresende des letzten Jahres sein Restguthaben?
   Nach wie vielen Jahren ist sein Guthaben am Jahresende erstmalig unter 75.000,- € gefallen?
   Bei der Berechnung der Guthaben am Jahresende sollen vorschüssige Zahlungen für Januar nicht berücksichtigt werden. (9 Pkte.)

c) Wie viel Geld könnte Herr Müller 30 Jahre lang jährlich vorschüssig höchstens abheben?
   Wie viel Geld könnte er jährlich vorschüssig zeitlich unbegrenzt höchstens abheben? (6 Pkte.)

Aufgabe 4: Elementarmathematik und Statistik (Wahlaufgabe) 20 Punkte

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung (mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$). (5 Pkte.)

$$|3 - 2x| \cdot |4 + x| \leq 11$$

b) Bestimmen Sie Definitionsbereich und Lösungsmenge folgender Ungleichung. (5 Pkte.)

$$\frac{\sqrt{5 + 4x}}{6 - x} < -6$$

c) Bestimmen Sie Definitionsbereich und Lösungsmenge folgender Gleichung. (5 Pkte.)

$$-\,log_x(7) + log_7(x) = \frac{log_{10}(7)}{log_{10}(x)}$$

d) Gegeben ist eine Urne mit 15 roten und 5 weißen Kugeln. (5 Pkte.)

1. Sie ziehen viermal ohne Zurücklegen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist keine weiße Kugel gezogen worden?
2. Sie ziehen viermal mit Zurücklegen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist keine weiße Kugel gezogen worden?
3. Sie ziehen viermal mit Zurücklegen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind weniger als drei weiße Kugeln gezogen worden?
4. Wie oft müssen Sie mindestens ziehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens eine weiße Kugel gezogen wird?

Formelsammlung Finanzmathematik

Einfache Verzinsung	$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{m}{12} \cdot i\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot i\right)$	
Diskontierung	kaufmännisch	$K_0 = K_n \cdot (1 - n \cdot i)$
	bürgerlich	$K_0 = \frac{K_n}{1+n \cdot i}$
Zinseszinsliche Verzinsung	jährlich	$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$
	unterjährig	$K_n = K_0 \cdot (1 + i^*)^{m \cdot n}$
		effektiver Jahreszins $j = (1 + i^*)^m - 1$
	stetig	$K_n = K_0 \cdot e^{n \cdot i}$
		effektiver Jahreszins $j = e^i - 1$
Gemischte Verzinsung	$K_{n,t} = K_0 \cdot (1 + i)^n \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot i\right)$	
Renten	jährlich vorschüssig	$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
	Barwert	$R_0 = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$
	jährlich nachschüssig	$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
	Barwert	$R_0 = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$
Jahreskonforme Ersatzrente	vorschüssige Zahlungen	$r_e = r \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i\right)$
	nachschüssige Zahlungen	$r_e = r \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot i\right)$
Dynamisierte Rente	jährlich vorschüssig	$R_n = r_1 \cdot q \cdot \frac{q^n - g^n}{q - g} \quad , \quad g \neq q$
		$R_n = n \cdot r_1 \cdot q^n \quad , \quad g = q$
	jährlich nachschüssig	$R_n = r_1 \cdot \frac{q^n - g^n}{q - g} \quad , \quad g \neq q$
		$R_n = n \cdot r_1 \cdot q^{n-1} \quad , \quad g = q$

Aufgabe 1

a)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x-4)}{x-4} \overset{L'H}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x-4}}{1} = 0^+ \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f \text{ pktsymm. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{\ln(x-4)}{x-4} \overset{\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)}{=} -\infty \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f \text{ pktsymm. } \lim_{x \to -4^-} f(x) = +\infty \quad \tfrac{1}{2}$$

b)

$\underline{x > 4:}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x-4} \cdot (x-4) - \ln(x-4)}{(x-4)^2} \; 1 \; = \underline{\underline{\frac{1 - \ln(x-4)}{(x-4)^2}}} \quad 1$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{\cancel{(x-4)}} \cdot (x-4)^{\cancel{2}} - \left(1 - \ln(x-4)\right) \cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} \quad 1$$

$$= \frac{\cancel{(x-4)}\left(-1 - 2 + 2\ln(x-4)\right)}{(x-4)^{\cancel{4}\,3}} = \underline{\underline{\frac{2\ln(x-4) - 3}{(x-4)^3}}} \quad 1$$

c)

NST: $f(x) = 0$
$x > 4$

$\Leftrightarrow \ln(x-4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 1 \Leftrightarrow x_{N_1} = 5$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f$ punktsymm.: $x_{N_2} = -5$ $\frac{1}{2}$

Extrema

notw. Bed.: $f'(x_E) = 0$
$x > 4$

$\Leftrightarrow 1 - \ln(x-4) = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln(x-4) \Leftrightarrow e = x-4$

$\Leftrightarrow x_{E_1} = e + 4 \approx 6{,}72$ 1

($\Rightarrow f$ punktsymm.: $x_{E_2} = -e-4$)

zusätzliche Bed.: $f''(x_E) \neq 0$

$f''(e+4) = \frac{2\ln(e+4-4)-3}{(e+4-4)^2} = \frac{-1}{e^2} < 0 \Rightarrow H(e+4 \mid f(e+4))$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$= \underline{H(e+4 \mid \frac{1}{e})}$ 0,37 $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ da f punktsymm.: $\underline{T(-e-4 \mid -\frac{1}{e})}$ $\frac{1}{2}$

Wendepunkte

notw. Bed.: $f''(x_W) = 0$
$x > 4$

$\Leftrightarrow 2\ln(x-4) - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x-4) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x - 4 = e^{3/2} \Leftrightarrow x_{W_1} = e^{3/2} + 4$ 1

($\Rightarrow$ da f punktsymm.: $x_{W_2} = -e^{3/2} - 4$)

zusätzl. Bed.: VZW von f'' bei x_{W_1}

$f''(e^{3/2}+3) = \frac{2\ln(e^{3/2}-1)-3}{(e^{3/2}-1)^2} \approx -0{,}01$

$f''(e^{3/2}+5) = \frac{2\ln(e^{3/2}+1)-3}{(e^{3/2}+1)^3} \approx 0{,}002$ 1

VZW $(-) \to (+)$ $\frac{1}{2}$

$W_{RL}(e^{3/2}+4 \mid f(e^{3/2}+4))$

$= \underline{W_{RL}(e^{3/2}+4 \mid \frac{3}{2e^{3/2}})}$ 1

$\Rightarrow$ da f punktsymm.: $\underline{W_{RL}(-e^{3/2}-4 \mid -\frac{3}{2e^{3/2}})}$ $\frac{1}{2}$

d)

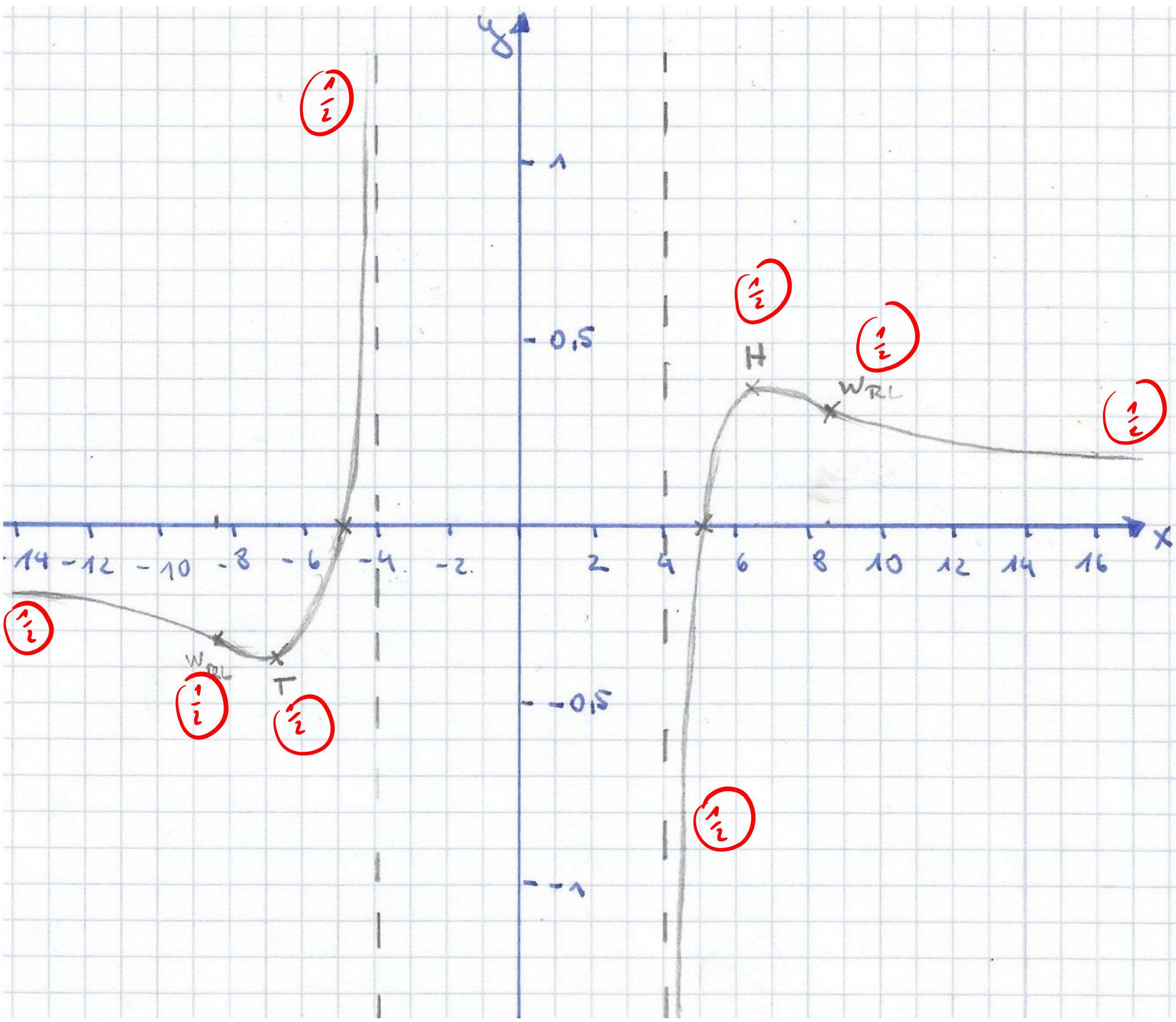
$t(x) = mx + n$ $\qquad x = e^{3/2}+4 \approx 8{,}48$, $y = \frac{3}{2e^{3/2}} \approx 0{,}33$ $\frac{1}{2}$

$m = f_1'(e^{3/2}+4) = \frac{1-\ln(e^{3/2})}{(e^{3/2})^2} = -\frac{1}{2e^3} \approx -0{,}02$ $\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2e^{3/2}} = -\frac{1}{2e^3}\cdot(e^{3/2}+4) + n \Rightarrow n = \frac{3}{2e^{3/2}} + \frac{(e^{3/2}+4)}{2e^3} \approx 3{,}56$ $\frac{1}{2}$

$\underline{\underline{t(x) = -0{,}02x + 3{,}56}}$ $\frac{1}{2}$

e)



Aufgabe 2

a)

$$\int f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right] - \int \underset{u'}{x} \cdot \underset{v}{\ln(x)}\,dx$$

1

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right] - \left(\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right] - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \right)$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right] - \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right] + \frac{1}{2}\int x\,dx$$

1

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4}\right]$$

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{x^2}{3}\cdot e^t \cdot \frac{dt}{3x^2} = \frac{1}{9}\int e^t\,dt$$

$$t = x^3 - 4$$

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2$$

1

$$= \left[\frac{1}{9}e^{x^3-4}\right]$$

1

$$\int h(x)\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\,dx = \left[\ln(x)\right] - \int x^{-3}\,dx$$

1

$$= \left[\ln(x) + \frac{1}{2}x^{-2}\right] = \left[\frac{1}{2x^2} + \ln(x)\right]$$

1

b)

$$\left| \int_1^{1,5} g(x) - h(x)\, dx \right| = \left| \left[\frac{e^{x^3-4}}{9} - \frac{1}{2x^2} - \ln(x) \right]_1^{1,5} \right| \quad (1)$$

$$= \left| \frac{e^{-0,625}}{9} - \frac{1}{4,5} - \ln(1,5) - \frac{e^{-3}}{9} + \frac{1}{2} + 0 \right|$$

$$\approx \left| 0,059 - 0,222 - 0,405 - 0,006 + 0,5 \right| \quad (1)$$

$$= \underline{\underline{0,074}} \quad (1)$$

c)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

$$\approx \underline{\underline{0,258}} \quad (1)$$

d)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_a(x)\, dx \approx a \cdot 0,258 \overset{!}{=} 1 \quad (1)$$

$$a = \underline{\underline{3,876}} \quad (1)$$

e)

$$\int_1^b g(x)\,dx = \left[\frac{e^{x^3-4}}{9} \right]_1^b$$

$$= \frac{1}{9}\left(e^{b^3-4} - e^{-3} \right)$$

$$= \frac{1}{9} e^{b^3-4} - \frac{1}{9e^3} \overset{!}{=} \frac{8}{9e^3} \qquad 1$$

$$\frac{1}{9} e^{b^3-4} = \frac{1}{e^3}$$

$$e^{b^3-4} = \frac{9}{e^3} \qquad | \ln(\ldots) \qquad 1$$

$$b^3 = \ln\left(\frac{9}{e^3}\right) + 4$$

$$b = \sqrt[3]{\ln(9) + 1} \approx \underline{\underline{1{,}473}} \qquad 1$$

f)

Gegenbsp.:

$$\int x^2\,dx = \left(\int x\,dx \right)^2$$

$$\frac{x^3}{3} = \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \quad \text{↯} \qquad 1$$

Begründung: Integral als eine Summe darf so nicht umgeformt werden, das wäre wie $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ↯ 2

Aufgabe 3

a) $K \le K_0(1+i)^n \Leftrightarrow i \ge \sqrt[n]{\frac{K}{K_0}} - 1 = \sqrt[20]{\frac{150}{65}} - 1 = 0{,}042698$, $\underline{i_1 = 4{,}27\%}$ 1

$K \le K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} \Leftrightarrow i \ge m\left(\sqrt[m\cdot n]{\frac{K}{K_0}} - 1\right) = 4\left(\sqrt[80]{\frac{150}{65}} - 1\right) = 0{,}04203$, $\underline{i_2 = 4{,}21\%}$ 2

$K \le K_0 e^{n i} \Leftrightarrow i \ge \frac{1}{n}\ln\frac{K}{K_0} = \frac{1}{20}\ln\frac{150}{65} = 0{,}04181$, $\underline{i_3 = 4{,}19\%}$ 2 5

b) $r_e = 1500\,€\,(12 + 6{,}5\cdot 0{,}03) = \underline{18\,292{,}50\,€}$ 1

$0 \le K_0 q^n - r_e\frac{q^n-1}{i} \Leftrightarrow 0 \le K_0 i q^n - r_e q^n + r_e$ 1

$\Leftrightarrow q^n(r_e - K_0 i) \le r_e \Leftrightarrow q^n \le \frac{r_e}{r_e - K_0 i} \Leftrightarrow n \le \frac{\ln\frac{r_e}{r_e-K_0 i}}{\ln q}$ 1

$n \le \frac{\ln\frac{18\,292{,}50\,€}{18\,292{,}50\,€ - 250\,000\,€\cdot 0{,}03}}{\ln 1{,}03} = 17{,}9$ $\underline{n_1 = 17 \text{ Jahre}}$ 1

$\bar{R}_{17} = 250\,000\,€\; 1{,}03^{17} - 18\,292{,}50\,\frac{1{,}03^{17}-1}{0{,}03} = \underline{15\,138{,}06\,€}$ 1

$K > \bar{R}_n = K_0 q^n - r_e\frac{q^n-1}{i}$, mit $K = 75\,000\,€$ 1

$Ki > K_0 i q^n - r_e q^n + r_e \Leftrightarrow r_e q^n - K_0 i q^n > r_e - Ki$ 1

$\Leftrightarrow q^n(r_e - K_0 i) > r_e - Ki \Leftrightarrow n > \frac{\ln\frac{r_e - Ki}{r_e - K_0 i}}{\ln q}$ 1

$n > \frac{\ln\frac{18\,292{,}50\,€ - 75\,000\,€\cdot 0{,}03}{18\,292{,}50\,€ - 250\,000\,€\cdot 0{,}03}}{\ln 1{,}03} = 13{,}4$ $\underline{n_2 = 14 \text{ Jahre}}$ 1 9

c) $0 \le K_0 q^n - r q\frac{q^n-1}{i} \Leftrightarrow 0 \le K_0 i q^{n-1} - r(q^n-1)$ 1

$\Leftrightarrow r \le \frac{K_0 i q^{n-1}}{q^n-1} = \frac{250\,000\,€\cdot 0{,}03\cdot 1{,}03^{29}}{1{,}03^{30}}$ 1

$= 12\,383{,}315\,€$ $\underline{r_1 = 12\,383{,}31\,€}$ 1

$r_e \le z$, $r_e = rq$, $z = K_0 \cdot i$ 1

$rq \le K_0 i \Leftrightarrow r \le \frac{K_0 i}{q} = \frac{250\,000\,€\cdot 0{,}03}{1{,}03}$ 1

$= 7281{,}553\,€$ $\underline{r_2 = 7281{,}55\,€}$ 1 6

Aufgabe 4

a) Punkte: 1,5 je Fall zzgl. 0,5 für die Lösungsmenge am Ende.

$|3-2x| \cdot |4+x| \leq 11$ $\quad \boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Fall 1}}$ $|+ \text{VO}| \cdot |+\text{VO}|$

$3-2x \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \geq x$, $4+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$

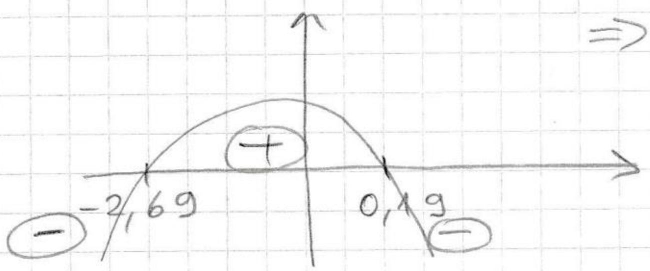
Bedingung: $\boxed{B: \frac{3}{2} \geq x \geq -4}$ $\quad \frac{1}{2}$

$(3-2x)\cdot(4+x) \leq 11 \quad |-11$

$1 - 5x - 2x^2 \leq 0$, $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot(-2)\cdot 1}}{-4}$ $\quad \frac{1}{2}$

$x_1 \approx 0{,}19$, $x_2 = -2{,}69$

Skizze-1



$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = [-4; -2{,}69] \cup [0{,}19; \frac{3}{2}]$ $\quad \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Fall 2}}$ $|-| \cdot |+|$

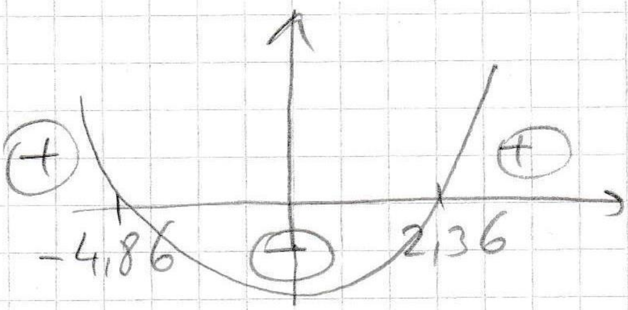
Bedingung: $\boxed{B: x > \frac{3}{2}}$ $\quad \frac{1}{2}$

$(-3+2x)\cdot(4+x) \leq 11$

$2x^2 + 5x - 23 \leq 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot 2\cdot(-23)}}{4}$ $\quad \frac{1}{2}$

$x_1 \approx 2{,}36 \quad x_2 \approx -4{,}86$

Skizze-2



$$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \left]\frac{3}{2};\ 2{,}36\right]$$

$\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Fall 3}}$ $|+|\cdot|-|$

$\frac{1}{2}$

Bedingung: $\boxed{B:\ x < -4}$

$$(3-2x)\cdot(-4-x) \leq 11$$

$$2x^2 + 5x - 23 \leq 0$$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ Laut der Skizze-2: $\mathbb{L}_3 = \left[-4{,}86;\ -4\right[$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3$$

$$\mathbb{L} = [-4{,}86;\ -2{,}69] \cup [0{,}19;\ 2{,}36]$$ $\frac{1}{2}$

b)

$$\frac{\sqrt{5+4x}}{6-x} < -6 \qquad \begin{array}{l} 5+4x \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{4} \\ 6-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 6 \end{array}$$

1 $\Rightarrow \boxed{\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq -\frac{5}{4} \wedge x \neq 6 \right\}}$

$\boxed{\text{Fall 1}}$ $6 - x > 0$

$6 > x \Rightarrow$ Bedingung: $\boxed{B: -\frac{5}{4} \leq x < 6}$ ½

$$\underbrace{\sqrt{5+4x}}_{0 \vee \oplus} < \underbrace{-36+6x}_{\ominus} \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{ \} \quad ½$$

$\boxed{\text{Fall 2}}$ $6 - x < 0$

$6 < x \Rightarrow \boxed{B: x > 6}$ ½

$$\frac{\sqrt{5+4x}}{6-x} < -6 \quad \Big| \cdot \underbrace{(6-x)}_{\ominus}$$

$$\underbrace{\sqrt{5+4x}}_{\oplus} > \underbrace{-36+6x}_{\oplus} \quad \Big| (\ldots)^2$$

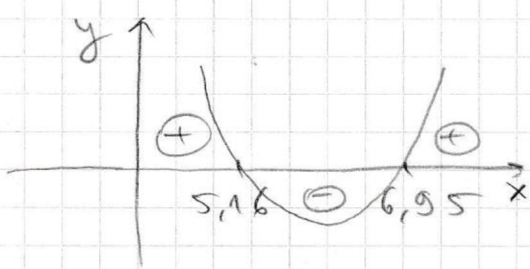
$$5 + 4x > 36x^2 - 432x + 1296$$

$$0 > 36x^2 - 436x + 1291$$

1

$$x_{1;2} = \frac{436 \pm \sqrt{436^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1291}}{2 \cdot 36} \Rightarrow x_1 \approx 6{,}95 \;,\; x_2 \approx 5{,}16 \quad ½$$

Skizze



$\Rightarrow \mathbb{L}_2 =]6; 6{,}95[$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$ 1

$\boxed{\mathbb{L} =]6; 6{,}95[}$

c)

$$-\log_x 7 + \log_7 x = \frac{\lg 7}{\lg x} \qquad \boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad 1$$

$\frac{1}{2}$

$$-\log_x 7 + \log_7 x = \log_x 7 \qquad \left(\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\right)$$

$$\log_7 x = 2 \cdot \log_x 7$$

$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\log_x 7} = 2 \cdot \log_x 7 \qquad \left(\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right)$$

$\frac{1}{2}$ $$\frac{1}{2} = (\log_x 7)^2 \quad \Big| \pm\sqrt{}$$

$$\Rightarrow \log_{x_1} 7 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Big| x_1^{(\dots)} \qquad \log_{x_2} 7 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(x_2^{(\dots)}\right)$$

1 $$7 = x_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \Big| \sqrt[\frac{1}{\sqrt{2}}]{} \qquad 7 = x_2^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \Big| \sqrt[-\frac{1}{\sqrt{2}}]{}$$ 1

$$15{,}67 = x_1 \qquad 0{,}06 = x_2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{0{,}06;\, 15{,}67\}}}$$ $\frac{1}{2}$

d) 15 rote, 5 weiße Kugeln

1. $P(\overline{W}\overline{W}\overline{W}\overline{W}) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} \cdot \frac{12}{17} \approx 0{,}2817 = \mathbf{28{,}17}\%$ 1

2. $P(\overline{W}\overline{W}\overline{W}\overline{W}) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} \approx 0{,}3164 = \mathbf{31{,}64}\%$ 1

3. $n = 4,\ k < 3,\ p = \frac{1}{4}$

$$P_4(X < 3) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{81}{256} + \frac{27}{64} + \frac{54}{256} \approx \mathbf{94{,}92}\%$$ 1

4. $n =?,\ k \geq 1,\ p = \frac{1}{4}$

$$P_n(X \geq 1) = 1 - P_n(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0{,}99$$ 1

Also: $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot ln\left(\frac{3}{4}\right) \leq ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{ln(0{,}01)}{ln\left(\frac{3}{4}\right)}$ (da $ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$ ist)

1

Also muss $n \geq 16{,}007$ gelten → $\boldsymbol{n = 17}$